Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2022, Extraordinaria

mentoor.es

Cuestión 1. Campo Gravitatorio

Explica qué se entiende por fuerza conservativa y su relación con el concepto de energía potencial. ¿Es lo mismo la energía potencial gravitatoria que el potencial gravitatorio? ¿En qué unidades del SI se mide cada una de estas dos magnitudes? Justifica las respuestas a partir de sus definiciones.

Solución:

Una *fuerza conservativa* es aquella fuerza cuyo trabajo realizado sobre una partícula que se mueve de un punto A a un punto B es independiente de la trayectoria seguida entre estos dos puntos. Es decir, el trabajo realizado solo depende de las posiciones inicial y final de la partícula, no de cómo se mueve entre ellas. Matemáticamente, para una fuerza $\vec{F}$ conservativa, se cumple que

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

es independiente de la trayectoria. La relación entre una fuerza conservativa y la *energía potencial* (E_p) es directa. Para una fuerza conservativa, existe una función escalar llamada energía potencial tal que el trabajo realizado por la fuerza conservativa al mover una partícula desde A hasta B está dado por la diferencia de energía potencial en esos puntos:

$$W_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B).$$

Por lo tanto, la energía potencial permite calcular el trabajo realizado por fuerzas conservativas sin necesidad de conocer la trayectoria exacta.

No es lo mismo *energía potencial gravitatoria* que *potencial gravitatorio.*

- *Energía Potencial Gravitatoria (E_p):* Es la energía asociada a una masa m en un campo gravitatorio creado por otra masa M. Se calcula mediante la fórmula:

  $$E_p = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r},$$

  donde:
  - $G = 6,674 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ es la constante de gravitación universal,
  - M es la masa que crea el campo gravitatorio,
  - m es la masa de la partícula que experimenta el campo,
  - r es la distancia entre las masas.
- *Potencial Gravitatorio (V):* Es la energía potencial por unidad de masa en un punto dentro de un campo gravitatorio. Se define como:

  $$V = \frac{U}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

  Nótese que V representa la energía potencial que una unidad de masa tendría en ese punto del campo gravitatorio.

Las diferencias clave son:

- La *energía potencial gravitatoria* E_p depende de la masa m que se encuentra en el campo gravitatorio.
- El *potencial gravitatorio* V es una propiedad del campo gravitatorio mismo y es independiente de la masa de la partícula que se coloca en él.

Sus unidades en el Sistema Internacional (SI) son:

- *Energía Potencial Gravitatoria (E_p):* Se mide en *Julios (J)*. Un julio es igual a un Newton por metro ($1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{N \cdot m}$).
- *Potencial Gravitatorio (V):* Se mide en *Julios por kilogramo (J/kg)*. Esta unidad refleja que es una energía potencial por unidad de masa.

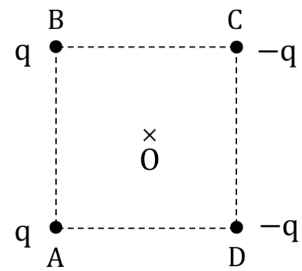
La distinción entre energía potencial gravitatoria y potencial gravitatorio se fundamenta en sus definiciones y en su dependencia de la masa. La energía potencial gravitatoria E_p está directamente relacionada con la interacción entre dos masas, mientras que el potencial gravitatorio V describe la energía potencial por unidad de masa en un punto específico del campo gravitatorio creado por una masa M. Las unidades reflejan esta diferencia: U se mide en Julios, una unidad de energía, mientras que V se mide en Julios por kilogramo, indicando que es una energía potencial por cada kilogramo de masa.

Por lo tanto, aunque están relacionadas, no son lo mismo y cada una tiene un uso específico en el análisis de campos gravitatorios y energía en sistemas físicos.

Cuestión 2. Campo Electromagnético

Cuatro cargas puntuales están situadas en los vértices A, B, C y D de un cuadrado de 2 m de lado, como se indica en la figura. Si $q = \sqrt{2}/2$ nC, calcula y representa los vectores campo eléctrico generados por cada una de las cargas y el total, en el centro del cuadrado, punto O.

Dato: constante de Coulomb, $k = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2

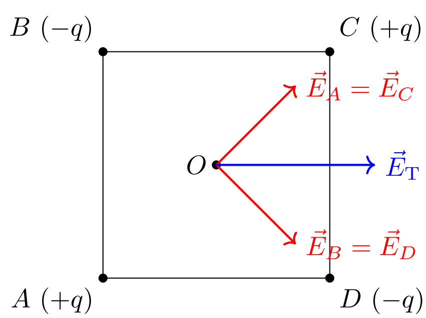


Solución:

La dirección y sentido del vector de campo eléctrico en un punto están determinados por la fuerza que actuaría sobre una carga positiva colocada en dicho punto. El principio de superposición establece que el campo eléctrico debido a varias cargas puntuales no se ve afectado por la presencia de otras cargas. De este modo, el campo resultante es la suma vectorial de los campos eléctricos individuales generados por cada una de las cargas en un punto. Para determinar el campo eléctrico total, usaremos la fórmula del campo eléctrico y aplicaremos el principio de superposición. La intensidad del campo eléctrico en un punto O se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\vec{E} = \frac{k \cdot q}{r^2} \cdot \vec{u}_r,$$

donde k es la constante de Coulomb, q es la magnitud de la carga, r es la distancia desde la carga al punto O, y $\vec{u}_r$ es el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$. Asumimos que el cuadrado que define la disposición de las cargas tiene 2 metros de lado. Asignaremos coordenadas a las posiciones de las cargas:



Para la carga A, ubicada en $(0,0)$, la distancia al punto O es:

$$\vec{r}_A = (1,1) - (0,0) = (1,1).$$

El vector unitario correspondiente es:

$$\vec{u}_{r_A} = \frac{\vec{r}_A}{|\vec{r}_A|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j}\right).$$

El campo eléctrico generado por la carga A es entonces:

$$\vec{E}_A = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10^{-9}}{(\sqrt{2})^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{i} + \vec{j}\right) = 2,25\vec{i} + 2,25\vec{j} \text{ N/C}..$$

Ya que la carga en C es igual a la de A, pero de signo contrario, y las distancias son idénticas, podemos afirmar que:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_C.$$

Para la carga B, ubicada en $(0,2)$, el cálculo es similar. Primero, calculamos el vector unitario:

$$\vec{r}_B = (1,1) - (0,2) = (1,-1).$$

El vector unitario correspondiente es:

$$\vec{u}_{r_B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{i} - \vec{j}\right).$$

El campo eléctrico generado por B es:

$$\vec{E}_B = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10^{-9}}{(\sqrt{2})^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{i} - \vec{j}\right) = 2,25\vec{i} - 2,25\vec{j} \text{ N/C}.$$

De la misma manera, como la carga D es igual a la de B, pero de signo contrario, se tiene que:

$$\vec{E}_B = \vec{E}_D.$$

Finalmente, aplicando el principio de superposición para el campo total E_T, sumamos las contribuciones de todas las cargas:

$$\vec{E}_T = 2 \cdot \vec{E}_A + 2 \cdot \vec{E}_B.$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

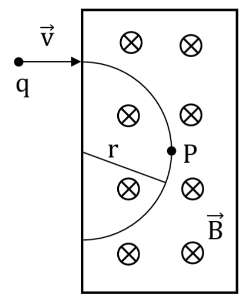
$$E_T = 2 \cdot \left(2,25\vec{i} + 2,25\vec{j}\right) + 2 \cdot \left(2 \cdot \left(2,25\vec{i} - 2,25\vec{j}\right)\right) = 9\vec{i} \text{ N/C},$$

y su magnitud es $9\,\text{N/C}$.

Por lo tanto, el campo eléctrico es $9\vec{i}$ N/C en el centro del cuadrado.

Cuestión 3. Campo Electromagnético

Una partícula de carga $q < 0$ entra con velocidad $\vec{v}$ en una región en la que hay un campo magnético uniforme normal al plano del papel, tal y como se muestra en la figura. Escribe la expresión del vector fuerza magnética que actúa sobre la carga. Razona si la trayectoria mostrada es correcta y representa razonadamente, en el punto P, los vectores velocidad y fuerza magnética.



Solución:

El fenómeno que se observa se puede justificar mediante la *Ley de Lorentz*. Esta ley nos explica que una partícula cargada que se encuentra en el interior de un campo magnético sufre una fuerza magnética (fuerza de Lorentz) normal a la trayectoria que le provoca cambios en la dirección de su vector velocidad, aunque no en su módulo. Esto provoca que su energía cinética permanezca constante. La expresión del vector fuerza magnética es:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Del enunciado y del esquema deducimos que:

$$\vec{v} = -v \cdot \vec{i}, \qquad \vec{B} = -B \cdot \vec{k} \qquad \text{y} \qquad q < 0.$$

Aplicando la Ley de Lorentz:

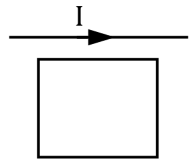
$$\vec{F} = -|q| \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = -|q| \cdot \left(-v \cdot \vec{i} \times -B \cdot \vec{k}\right) = -|q| \cdot (v \cdot B \cdot \vec{j}) = -|q| \cdot v \cdot B \cdot \vec{j}.$$

Es decir, la fuerza que recibe la carga en el punto P es hacia abajo, por lo que la trayectoria mostrada es correcta. En el punto P, los vectores velocidad $\vec{v}$ y fuerza magnética $\vec{F}$ son perpendiculares entre sí, lo que confirma la curvatura de la trayectoria de la partícula bajo la influencia del campo magnético.

Por lo tanto, la solución es la expresión del vector fuerza magnética y la confirmación de la trayectoria correcta de la partícula en el punto P.

Cuestión 4. Campo Electromagnético

Una espira rectangular se sitúa en las cercanías de un hilo conductor rectilíneo de gran longitud, recorrido por una corriente eléctrica cuya intensidad aumenta con el tiempo. Razona por qué aparecerá una corriente en la espira, indica cuál será su sentido y enuncia la ley del electromagnetismo que explica este fenómeno.



Solución:

Para analizar el fenómeno, consideramos que el hilo conductor rectilíneo por el que circula una corriente eléctrica genera un campo magnético a su alrededor según la *Ley de Biot-Savart*. El módulo del campo magnético B a una distancia r del hilo está dado por:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r},$$

donde μ_0 es la permeabilidad del vacío e I la intensidad de la corriente.

La dirección del campo magnético se determina mediante la *regla de la mano derecha*: si el pulgar apunta en la dirección de la corriente, los dedos envueltos indican la dirección del campo magnético circular alrededor del hilo. En este caso, dado que la intensidad de la corriente I aumenta con el tiempo, el campo magnético B en la región de la espira también incrementa proporcionalmente (con sentido entrante).

La espira rectangular situada en el campo magnético experimenta un flujo magnético Φ que está dado por:

$$\Phi = B \cdot A = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} \cdot A,$$

donde A es el área de la espira.

Debido a que la intensidad de la corriente I está aumentando con el tiempo, el flujo magnético Φ que atraviesa la espira también varía en el tiempo. Según la *Ley de Faraday-Henry*, una variación en el flujo magnético induce una fuerza electromotriz (fem) en la espira:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

El signo negativo está determinado por la *Ley de Lenz*, que establece que la fem inducida genera una corriente cuyo campo magnético se opone a la variación del flujo que la produce.

Como el flujo magnético está aumentando debido al aumento de la corriente en el hilo conductor, la corriente inducida en la espira generará un campo magnético que se opone a este incremento. Para lograr esto, la corriente en la espira debe circular en sentido antihorario (según la *regla de la mano derecha*), de manera que el campo magnético generado por la espira sea opuesto al campo producido por el hilo conductor.

Por lo tanto, una corriente eléctrica es inducida en la espira debido a la variación temporal del campo magnético generado por el hilo conductor. El sentido de la corriente inducida es antihorario, y este fenómeno está explicado por la Ley de Faraday-Henry junto con la Ley de Lenz.

Cuestión 5. Ondas

Escribe la expresión del nivel sonoro (en dB) en función de la intensidad de un sonido. Un auricular produce en la entrada del oído un nivel sonoro de 80 dB. Calcula la intensidad sonora en ese punto en $\mathbf{W/m^2}$.

Dato: intensidad umbral de referencia $\boldsymbol{I_0 = 10^{-12}}$ $\mathbf{W/m^2}$

Solución:

La expresión del nivel sonoro β (en decibelios, dB) en función de la intensidad del sonido I es:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde:

- β = nivel sonoro (dB),
- I = intensidad del sonido ($\mathrm{W/m^2}$),
- I_0 = intensidad umbral de referencia ($\mathrm{W/m^2}$), que es el límite de sensibilidad del oído humano para una frecuencia de 1 kHz.

Dado que el auricular produce un nivel sonoro de $\beta = 80$ dB, podemos sustituir los valores conocidos en la fórmula para encontrar la intensidad I:

$$80 = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right).$$

Dividimos ambos lados de la ecuación por 10:

$$8 = \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right).$$

Aplicamos la definición del logaritmo:

$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^8.$$

Despejamos I multiplicando ambos lados por 10^{-12} $\mathrm{W/m^2}$:

$$I = 10^8 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2} = 10^{-4}\ \mathrm{W/m^2}.$$

Por lo tanto, la intensidad sonora en la entrada del oído es $\boldsymbol{I = 10^{-4}}$ $\mathbf{W/m^2}$.

Cuestión 6. Óptica

Deduce la relación entre la distancia objeto, s, y la distancia focal imagen, f', de una lente para que la imagen sea invertida y de doble tamaño que el objeto.

Solución:

Para resolver este ejercicio, utilizamos las ecuaciones fundamentales de las lentes delgadas y la relación de aumento lateral. La ecuación de las lentes delgadas es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'},$$

donde:

- s es la distancia objeto (en metros, m),
- s' es la distancia imagen (en metros, m),
- f' es la distancia focal de la imagen (en metros, m).

La relación de aumento lateral es:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s},$$

donde:

- A_L es el aumento lateral,
- y' es la altura de la imagen,
- y es la altura del objeto.

Según el enunciado, la imagen es invertida y de doble tamaño que el objeto, lo que implica que el aumento lateral es:

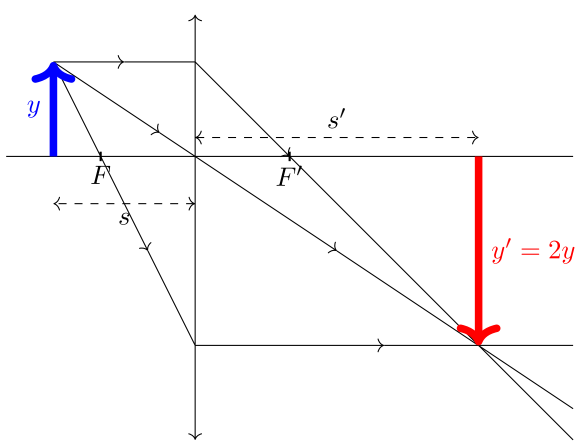
$$A_L = -2.$$

Sustituyendo en la relación de aumento:

$$-2 = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad s' = -2 \cdot s.$$

Ahora, sustituimos s' en la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{-2s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{-2 \cdot s}{3}.$$



Por lo tanto, la relación entre la distancia objeto s y la distancia focal imagen f' es $f' = -2s/3$ y la lente es convergente.

Cuestión 7. Óptica

Describe en qué consiste la hipermetropía. Explica razonadamente el fenómeno con ayuda de un trazado de rayos. ¿Con qué tipo de lente debe corregirse y por qué?

Solución:

La *hipermetropía* es un defecto de la visión que se caracteriza por la dificultad para enfocar claramente objetos cercanos, mientras que la visión a distancia permanece relativamente nítida. Esto se debe a que la imagen de los objetos próximos se forma detrás de la retina en lugar de sobre ella.

El ojo humano funciona como un sistema óptico compuesto principalmente por la córnea y el cristalino. Estos elementos refractan los rayos de luz que ingresan al ojo, enfocándolos en la retina para formar imágenes claras. En condiciones normales, la longitud del globo ocular y la curvatura de las lentes permiten que los rayos de luz se enfoquen precisamente en la retina.

En el caso de la hipermetropía, existen dos posibles causas principales:

- *Longitud axial del ojo reducida:* El globo ocular es más corto de lo normal, lo que hace que los rayos de luz converjan más allá de la retina.
- *Poder convergente insuficiente:* El cristalino o la córnea no refractan los rayos de luz con la suficiente fuerza para enfocarlos correctamente en la retina.

Debido a estas condiciones, los rayos de luz provenientes de objetos cercanos no se enfocan adecuadamente en la retina, lo que resulta en una visión borrosa para dichos objetos.

Para corregir la hipermetropía, se utilizan *lentes convergentes* (positivas). Estas lentes tienen la capacidad de refractar los rayos de luz de manera que los mismos se desvíen hacia el eje óptico, aumentando el poder convergente del sistema óptico del ojo. Al hacer esto, los rayos de luz son enfocados directamente en la retina, compensando la deficiencia del ojo hipermétrope.

Las lentes convergentes actúan añadiendo poder focal al sistema óptico del ojo. Al colocarse delante del ojo, estas lentes ajustan la trayectoria de los rayos de luz entrantes de manera que se enfocan correctamente en la retina. Esto permite que las personas con hipermetropía puedan ver objetos cercanos con claridad, eliminando la visión borrosa asociada a este defecto.

Por lo tanto, la hipermetropía consiste en la dificultad para enfocar objetos cercanos debido a que la imagen se forma detrás de la retina. Este defecto se corrige utilizando lentes convergentes que aumentan el poder convergente del ojo, permitiendo que los rayos de luz se enfoquen correctamente en la retina.

Cuestión 8. Física Moderna

Escribe las expresiones de la energía total y de la energía cinética de un cuerpo, en relación con su velocidad relativista, explicando la diferencia entre ambas energías. Una partícula cuya energía en reposo es $E_0 = 135$ MeV, se mueve con una velocidad $v = 0,5c$. Calcula la energía relativista de la partícula en MeV y su energía cinética en julios.

Dato: carga elemental, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C

Solución:

La energía en reposo viene dada por:

$$E_0 = m_0 \cdot c^2,$$

donde:

- E_0 es la energía en reposo (en MeV),
- m_0 es la masa en reposo (en kg),
- c es la velocidad de la luz ($3,00 \cdot 10^8$ m/s).

L energía total relativista es:

$$E = \gamma \cdot E_0,$$

donde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

y:

- E es la energía total (en MeV),
- γ es el factor de Lorentz,
- v es la velocidad de la partícula.

La energía cinética relativista es:

$$E_c = E - E_0 = (\gamma - 1) \cdot E_0$$

donde E_c es la energía cinética (en MeV o J). Primero, calculamos el factor de Lorentz γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} = 1,1547.$$

Hallamos la energía total relativista:

$$E = \gamma \cdot E_0 = 1,1547 \cdot 135 \text{ MeV} = 155,88 \text{ MeV}.$$

Obtenemos a continuación la energía cinética:

$$E_c = E - E_0 = 155,88 \text{ MeV} - 135 \text{ MeV} = 20,88 \text{ MeV}.$$

Convertimos a julios:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad \text{y} \quad 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} \Rightarrow E_c = 20,88 \text{ MeV} \cdot 10^6 \frac{\text{eV}}{\text{MeV}} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} = 3,34 \cdot 10^{-12} \text{ J}.$$

Por lo tanto, la energía relativista de la partícula es $E = 155,88$ MeV y su energía cinética es $E_c = 3,34 \cdot 10^{-12}$ J.

Problema 1. Campo Gravitatorio

La Estación Espacial Internacional tiene una masa $m = 4 \cdot 10^5$ kg y describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura sobre su superficie $h = 400$ km.

a) **Calcula las energías potencial, cinética y mecánica de la Estación en su movimiento por dicha órbita.**
b) **Calcula la energía que se debe aportar a la estación para que se sitúe en una órbita en la que su energía mecánica sea $E = -2 \cdot 10^{12}$ J. Calcula su velocidad en dicha órbita.**

Datos: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; masa de la Tierra, $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra, $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m

Solución:

a) **Calcula las energías potencial, cinética y mecánica de la Estación en su movimiento por dicha órbita.**

Primero, calculamos el radio orbital de la estación:

$$r = R_T + h = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} + 400 \cdot 10^3 \text{ m} = 6,8 \cdot 10^6 \text{ m}.$$

La energía potencial gravitatoria es:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 4 \cdot 10^5 \text{ kg}}{6,8 \cdot 10^6 \text{ m}} = -2,3541 \cdot 10^{13} \text{ J}.$$

La energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2.$$

Primero, calculamos la velocidad orbital usando la fórmula:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6,8 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 7672,6 \text{ m/s}.$$

Ahora, calculamos la energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot (7.672,6 \text{ m/s})^2 = 1,17676 \cdot 10^{13} \text{ J}.$$

La energía mecánica es:

$$E_m = E_c + E_p = 1,17676 \cdot 10^{13} \text{ J} + (-2,3541 \cdot 10^{13} \text{ J}) = -1,17734 \cdot 10^{13} \text{ J}.$$

Por lo tanto, las energías son:
- **Energía potencial: $E_p = -2,3541 \cdot 10^{13}$ J.**
- **Energía cinética: $E_k = 1,17676 \cdot 10^{13}$ J.**
- **Energía mecánica: $E_m = -1,17734 \cdot 10^{13}$ J.**

b) **Calcula la energía que se debe aportar a la estación para que se sitúe en una órbita en la que su energía mecánica sea $E = -2 \cdot 10^{12}$ J. Calcula su velocidad en dicha órbita.**

La energía que se debe aportar es la diferencia entre las energías mecánicas final e inicial:

$$W = \Delta E = E_{m_f} - E_{m_i} = (-2 \cdot 10^{12} \text{ J}) - (-1,17734 \cdot 10^{13} \text{ J}) = 9,7734 \cdot 10^{12} \text{ J}.$$

Entonces, se debe aportar $W = 9,7734 \cdot 10^{12}$ J.

Ahora, calculamos el radio de la nueva órbita usando la relación:

$$E_m = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot r}.$$

Despejamos r:

$$r = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot E_m}.$$

Sustituimos los valores:

$$r = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \cdot 4 \cdot 10^5\ \mathrm{kg}}{2 \cdot (-2 \cdot 10^{12}\ \mathrm{J})} = 40,02 \cdot 10^6\ \mathrm{m}.$$

La velocidad en la nueva órbita es:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{40,02 \cdot 10^6\ \mathrm{m}}} = 3162,3\ \mathrm{m/s}.$$

Por lo tanto, la energía que se debe aportar es $W = 9,7734 \cdot 10^{12}$ J, y la velocidad en la nueva órbita es $v = 3162,3$ m/s.

Problema 2. Campo Electromagnético

Una partícula con carga negativa entra con velocidad constante $\vec{v} = 2 \cdot 10^5\ \vec{j}$ m/s en una región del espacio en la que hay un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = 4 \cdot 10^4\ \vec{i}$ N/C y un campo magnético uniforme $\vec{B} = -B\ \vec{k}$ T, siendo $B > 0$.

a) **Calcula el valor de B necesario para que el movimiento de la partícula sea rectilíneo y uniforme. Representa claramente los vectores $\vec{v}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$, la fuerza magnética y la fuerza eléctrica.**

b) **En un instante dado se anula el campo eléctrico y el módulo de la fuerza que actúa sobre la partícula a partir de ese instante es $6,4 \cdot 10^{-15}$ N. Determina el valor de la carga de la partícula.**

Solución:

a) **Calcula el valor de B necesario para que el movimiento de la partícula sea rectilíneo y uniforme. Representa claramente los vectores $\vec{v}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$, la fuerza magnética y la fuerza eléctrica.**

Para que el movimiento de la partícula sea rectilíneo y uniforme, la fuerza neta que actúa sobre ella debe ser nula:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0},$$

donde:

$$\vec{F}_e = q\vec{E} \quad \text{(Fuerza eléctrica)},$$
$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{(Fuerza magnética)}.$$

Calculamos la fuerza eléctrica:

$$\vec{F}_e = q \left(4 \cdot 10^4\ \vec{i}\ \text{N/C}\right) = 4 \cdot 10^4\ q\ \vec{i}\ \text{N}.$$

Calculamos la fuerza magnética:

$$\vec{F}_m = q \left(2 \cdot 10^5\ \vec{j}\ \text{m/s} \times (-B\ \vec{k}\ \text{T})\right).$$

Recordando que $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$:

$$\vec{F}_m = q \left(2 \cdot 10^5\ (-B)\ \vec{i}\ \text{N}\right) = -2 \cdot 10^5\ B\ q\ \vec{i}\ \text{N}.$$

Igualando la suma de fuerzas a cero:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot 10^4\ q\ \vec{i} - 2 \cdot 10^5\ B\ q\ \vec{i} = \vec{0}.$$

Factorizando $q\ \vec{i}$:

$$q\ \vec{i}\left(4 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^5\ B\right) = \vec{0}.$$

Como $q \neq 0$ y $\vec{i}$ es un vector unitario, entonces:

$$4 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^5\ B = 0.$$

Despejando B:

$$B = \frac{4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^5} = \frac{4}{20} = 0,2\ \text{T}.$$

Por lo tanto, el valor de B necesario es $B = 0,2$ T.

b) En un instante dado se anula el campo eléctrico y el módulo de la fuerza que actúa sobre la partícula a partir de ese instante es $\mathbf{6,4 \cdot 10^{-15}}$ N. Determina el valor de la carga de la partícula.

Al anularse el campo eléctrico, la única fuerza que actúa sobre la partícula es la fuerza magnética:

$$F = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin\theta.$$

Dado que $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares ($\theta = 90°$, $\sin 90° = 1$):

$$F = |q| \cdot v \cdot B.$$

Despejamos $|q|$:

$$|q| = \frac{F}{v \cdot B}.$$

Sustituimos los valores:

$$|q| = \frac{6,4 \cdot 10^{-15}\ \text{N}}{(2 \cdot 10^{5}\ \text{m/s}) \cdot 0,2\ \text{T}} = 1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}.$$

Dado que la partícula tiene carga negativa:

$$q = -1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}.$$

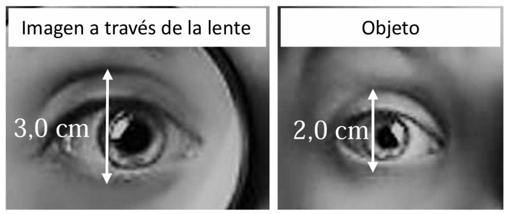
Por lo tanto, el valor de la carga de la partícula es $\boldsymbol{q = -1,6 \cdot 10^{-19}}$ C.

Problema 3. Óptica

A través de una lente delgada se observa el ojo de una persona. Sabiendo que la lente se sitúa a 4 cm del ojo y teniendo en cuenta los datos de la figura, determina:

a) **La posición de la imagen, la distancia focal de la lente y su potencia en dioptrías. Realiza un trazado de rayos que presente la situación mostrada.**

b) **¿La lente es convergente o divergente? ¿La imagen es real o virtual? ¿De qué tamaño se verá el ojo si alejamos la lente del ojo 1,5 cm más?**



Solución:

a) **La posición de la imagen, la distancia focal de la lente y su potencia en dioptrías. Realiza un trazado de rayos que presente la situación mostrada.**

Primero, tomamos los datos proporcionados:
- Distancia del objeto (ojo) a la lente: $s = -4$ cm (negativa porque el objeto está a la izquierda de la lente).
- Altura del objeto: $y = 2$ cm.
- Altura de la imagen: $y' = 3$ cm.

Calculamos el aumento lateral (A_L):

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{3 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

El aumento lateral también se relaciona con las distancias:

$$A_L = \frac{s'}{s}.$$

Despejamos s':

$$-\frac{s'}{s} = A_L \quad \Rightarrow \quad s' = A_L \cdot s.$$

Sustituimos los valores:

$$s' = 1,5 \cdot (-4 \text{ cm}) = -6 \text{ cm}.$$

Ahora, aplicamos la ecuación de las lentes delgadas para calcular la distancia focal (f'):

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}.$$

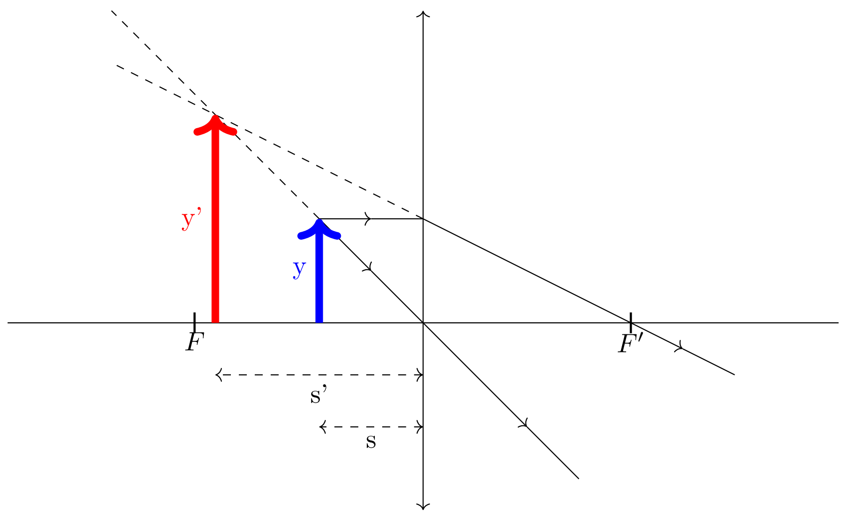
Sustituimos los valores:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{-6 \text{ cm}} - \frac{1}{-4 \text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad f' = 12 \text{ cm}.$$

La potencia de la lente (P) en dioptrías es:

$$P = \frac{1}{f' \text{ (en metros)}} = \frac{1}{0,12 \text{ m}} = 8,33 \text{ dioptrías}.$$

El trazado de rayos es:



Por lo tanto, la imagen se forma a 6 cm a la izquierda de la lente, la distancia focal es $f' = 12$ cm y la potencia de la lente es $P = 8,33$ dioptrías.

b) **¿La lente es convergente o divergente? ¿La imagen es real o virtual? ¿De qué tamaño se verá el ojo si alejamos la lente del ojo 1,5 cm más?**

Tipo de lente e imagen:
- La distancia focal es positiva ($f' > 0$), por lo que la lente es *convergente*.
- La imagen tiene $s' < 0$, lo que indica que la imagen se forma en el mismo lado que el objeto y es *virtual*. demás, es derecha y aumentada.

Calculemos el nuevo tamaño de la imagen al alejar la lente 1,5 cm. La nueva posición del objeto es:

$$s_{\text{nuevo}} = s - 1,5 \text{ cm} = -4 \text{ cm} - 1,5 \text{ cm} = -5,5 \text{ cm}.$$

Aplicamos la ecuación de las lentes delgadas para encontrar la nueva posición de la imagen (s'_{nuevo}):

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'_{\text{nuevo}}} - \frac{1}{s_{\text{nuevo}}}.$$

Sustituimos los valores:

$$\frac{1}{12 \text{ cm}} = \frac{1}{s'_{\text{nuevo}}} - \frac{1}{-5,5 \text{ cm}} \quad \Rightarrow \quad s'_{\text{nuevo}} = -10,15 \text{ cm}.$$

El nuevo aumento lateral es:

$$A_{L_{\text{nuevo}}} = \frac{s'_{\text{nuevo}}}{s_{\text{nuevo}}} = \frac{-10,15 \text{ cm}}{-5,5 \text{ cm}} = 1,85.$$

El nuevo tamaño de la imagen es:

$$y'_{\text{nuevo}} = A_{L_{\text{nuevo}}} \cdot y = 1,85 \cdot 2 \text{ cm} = 3,69 \text{ cm}.$$

Por lo tanto, la lente es convergente, la imagen es virtual y, al alejar la lente 1,5 cm más, el tamaño del ojo se verá como $y'_{\text{nuevo}} = 3,69$ cm.

Problema 4. Física Moderna

Tras un episodio de "tormenta seca" o calima, se recoge y analiza una muestra de polvo y se concluye que contiene Cs-137, un isótopo radiactivo asociado a alguna prueba nuclear realizada hace 60 años. La actividad de la muestra, debida exclusivamente al Cs-137, es de $0,08$ Bq (muy baja). Determina:

a) **El número de núcleos y la masa de Cs-137 contenida en la muestra (expresa el resultado en picogramos).**
b) **La actividad de la muestra hace 60 años, justo tras la prueba nuclear.**

Datos: periodo de semidesintegración del Cs-137, $T_{1/2} = 30,2$ años; masa de un núcleo de Cs-137, $M = 2,27 \cdot 10^{-25}$ kg.

Solución:

a) **El número de núcleos y la masa de Cs-137 contenida en la muestra (expresa el resultado en picogramos).**

Primero, calculamos la constante de desintegración radiactiva (λ) usando el periodo de semidesintegración:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{30,2 \text{ años}} = 0,02295 \text{ años}^{-1}.$$

Para trabajar con unidades compatibles con el becquerelio ($\text{Bq} = \text{s}^{-1}$), convertimos λ a segundos:

$$\lambda = 0,02295 \text{ años}^{-1} \cdot \frac{1 \text{ año}}{31\,557\,600 \text{ s}} = 7,274 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}.$$

Ahora, calculamos el número de núcleos (N) usando la relación entre actividad y número de núcleos:

$$A = \lambda \cdot N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{A}{\lambda} = \frac{0,08 \text{ Bq}}{7,274 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}} = 1,099 \cdot 10^{8} \text{ núcleos}.$$

Calculamos la masa total (m) de Cs-137 en la muestra:

$$m = N \cdot M = (1,099 \cdot 10^{8} \text{ núcleos}) \cdot (2,27 \cdot 10^{-25} \text{ kg/núcleo}) = 2,497 \cdot 10^{-17} \text{ kg}.$$

Convertimos la masa a picogramos:

$$1 \text{ pg} = 10^{-12} \text{ g} = 10^{-15} \text{ kg} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{2,497 \cdot 10^{-17} \text{ kg}}{10^{-15} \text{ kg/pg}} = 0,2497 \text{ pg}.$$

Por lo tanto, la muestra contiene aproximadamente $N = 1,1 \cdot 10^{8}$ núcleos de Cs-137 y su masa es $m = 0,2497$ pg.

b) **La actividad de la muestra hace 60 años, justo tras la prueba nuclear.**

Utilizamos la ley de desintegración radiactiva para relacionar la actividad inicial (A_0) con la actividad actual (A):

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad A_0 = A \cdot e^{\lambda t}.$$

Sustituimos los valores:

$$A_0 = 0,08 \text{ Bq} \cdot e^{(0,02295 \text{ años}^{-1}) \cdot 60 \text{ años}} = 0,317 \text{ Bq}.$$

Por lo tanto, la actividad de la muestra hace 60 años era de $A_0 = 0,317$ Bq.